

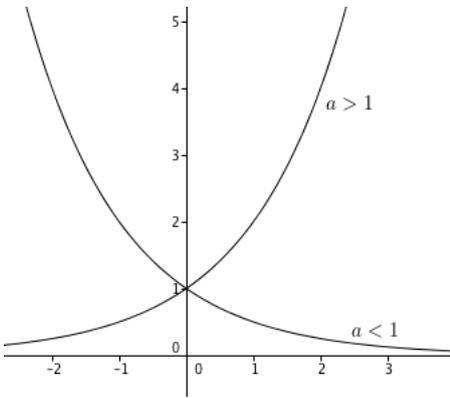


Exponentielle de base a

1. Définition et premières propriétés

On a déjà étudié les suites géométriques. Une suite géométrique de premier terme 1 et de raison a s'écrit $u_n = a^n$. Ici, nous nous intéressons à ce type de phénomène, mais pour des fonctions.

Définition 3.1 La fonction $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$, s'appelle exponentielle de base a .



Exercice 3.1 Rémi place 500 euros au taux annuel de 4,5% pendant n années et $0 < n < 18$. soit (u_n) le capital à l'année n .

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison.

.....
.....
.....
.....

2. Quel est le capital au bout de 3 ans ? De 17 ans ?

.....
.....
.....
.....

3. Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à $[0; 18]$ par $f(x) = 500 \times (1,045)^x$

(a) Comment s'appelle ce type de fonction ? Quelle est sa "base" ?

.....
.....
.....

(b) Calculer $f(1,5)$ et $f(\frac{7}{3})$

.....
.....
.....

(c) Interprétez les résultats de la question précédente dans le cadre de l'exercice.

.....
.....
.....
.....
.....

Propriété 3.1 Les règles de calcul sur les puissances s'appliquent aux exponentielles de base a :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^n = a^{n \times x}$

Exercice 3.2 1. Simplifier $5^{-3} \times 5^{-5}$

.....
.....

2. Simplifier $\frac{2,7^3 \times 2,7^{-5}}{2,7^5}$

.....
.....

3. Simplifier $(4,5^3)^{-2,1} \times 4,5^{6,2}$

.....
.....

4. Simplifier $0,89^{1,5} \times 0,89 \times 0,89^{-3,2}$

.....
.....

5. Simplifier $3,5^{2,2} \times 2^{2,2} \times 0,5^{2,2}$

.....
.....

6. Simplifier $\frac{4,1^{2,5} \times 4,1^{-5,2}}{4,1^{-4,8} \times 4,1^{2,7}}$

.....
.....

Exercice 3.3 1. Écrire plus simplement sous la forme a^x les expressions suivantes :

(a) $(1,3^2)^{0,2} \times \frac{1,3^{-3}}{1,3^{2,5}}$

.....
.....
.....

(b) $\frac{3,5^{-2} \times 3,5^{-1,5}}{5^{-3,5}}$

.....
.....
.....

2. Démontrer par le calcul que $(1,4^x - 2)(1,4^x + 4) = 1,4^{2x} + 2 \times (1,4)^x - 8$

.....
.....
.....

.....

 3. Simplifier l'expression $\frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} + \frac{1,1^{x-0,5}}{2,2}$

2. Sens de variation

Propriété 3.2 Comme on l'a vu sur la figure proposée en début de chapitre :

- Si $0 < a < 1$, l'exponentielle base a est décroissante,
- Si $a > 1$, l'exponentielle base a est croissante,
- Si $a = 1$, l'exponentielle base a est constante égale à 1.

Propriété 3.3 En revanche, si l'on multiplie l'exponentielle par une constante k :

- Si $k > 0$, le sens de variation de ka^x est le même que celui de a^x ,
- Si $k < 0$, le sens de variation de ka^x est l'inverse de celui de a^x ,
- Si $k = 0$, la fonction ka^x est constante égale à 0.

Exercice 3.4 Dans chaque cas, donner le sens de variation de f sur \mathbb{R}

1. $f(x) = 2,21^x$

2. $f(x) = 0,94^x$

3. $f(x) = 0,99^{-x}$

4. $f(x) = 1,001^{-x}$

5. $f(x) = 0,005 \times 2,6^x$

6. $f(x) = 2500 \times 0,99^x$

Exercice 3.5 Montrer que la courbe de la fonction $f(x) = 2 \times 0,5^x$ passe par le point $A(-1; 4)$

Exercice 3.6 Soit la fonction $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ définie sur \mathbb{R} .

1. Calculer l'image de $-1,5$, puis $f(0)$.

.....
.....
.....
.....
.....

2. Donner le sens de variation de f grâce aux propriétés ci-dessus.

.....
.....
.....
.....
.....

3. Démontrer que la courbe représentative de f passe par le points $(0;2)$ et par le point $(0,5; \sqrt{2})$

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3.7 Une usine fabrique des valves pour robinets. Le 1er janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P , en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3% chaque mois à partir de cette date.

Au bout de n mois écoulés, on a donc la suite $P_n = 2 \times (1,03)^n$ pour n entier.

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction $P(x) = 2 \times (1,03)^x$ où x est un réel.

On considère qu'un mois dure 30 jours. Au bout de 6 jours, la production sera donc de $P(0,2)$ et au bout de 15 jours de $P(0,5)$.

1. Montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 1.

.....
.....
.....
.....
.....

2. Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ? Quelle est cette production ?

.....
.....
.....
.....
.....

3. Calculer la production le 1er février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

A l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de valves de robinets dépassera 4 500 par jour

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
3. L'action valait 52 euros. Quelle est sa cote au bout de 12 ans ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3.10 Le niveau d'eau d'une rivière a baissé de 11% pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3.11 En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5% par an pendant 10 ans , puis a baissé de 1% par an jusqu'en 2020.

1. Quelle est sa population en 2020 ?

.....
.....
.....
.....

2. Calculer le taux annuel moyen d'évolution

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3.12 La cote argus d'une voiture mise en circulation le 1er avril 2015 est modélisée par la fonction $f(x) = 21345 \times (1,2)^{-x}$, où x est le temps écoulé en années depuis le 1er avril 2015.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter les résultats.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. En déduire le taux de diminution annuel de la valeur de la voiture.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Cette voiture est revendue le 1er octobre 2019.

(a) Calculer la cote argus de cette voiture à cette date, puis le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat.

.....
.....

.....
.....
.....
.....
(b) En déduire le taux mensuel moyen de la décote.

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3.13 Paul, élève de Terminale STMG, dispose de 300 euros qu'il souhaite placer sur un livret au taux annuel de 3,90%.

1. Quel est son capital au bout de 36 mois ?

.....
.....
.....
.....
.....

2. Il a 18 ans. Quel sera son capital quand il aura doublé son âge ?

.....
.....
.....
.....
.....

3. En combien de temps aura-t-il doublé son capital initial ?

.....
.....
.....
.....
.....